Tentamen W5, 6 maart 2001, 14.00 tentamenhal

(1) U is een deelverzameling van het complexe vlak $\mathbf{C}$.
(a) Geef de definities van "U is open" en van "U is compact".
(b) Geef een niet-trivaal voorbeeld van een open U en van een compacte U.

(2) Hoe is de convergentiestraal r van $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gedefiniëerd? Geef machtreeksen F met convergentiestraal r gelijk aan $0, 1, \infty$ respectievelijk.

(3) Op welke deelverzamelingen $U \subset \mathbf{C}$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ absoluut uniform convergent? Van welke rationale functie f is $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ de machtreeks ontwikkeling in $z = 0$?

(4) Bereken de Laurentreeks van de funktie $f(z) := \frac{\sin z}{z}$ in het punt $z = 0$. Gebruik die reeks om het maximum van $|f(z)|$ op de verzameling $\{z \in \mathbf{C} |\ |z| \leq 1\}$ te berekenen.

(5) F is de meromorfe functie $\frac{e^z - 1}{z^2(z-1)^2}$.
(a) Bereken voor elk punt $a \in \mathbf{C}$ de orde van F in a.
(b) Heeft F een pool voor het punt $z = \infty$? Zo ja, wat is zijn orde?
(c) Bereken de eerste drie termen van de Laurent ontwikkeling van F in het punt $z = 1$.

(6) C is de cirkel met middelpunt 0, straal 2,5 en voorzien van orientatie van de klok. Bereken $\int_C \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} dz$.

(7) Bewijs dat $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}$. Hint: Voor $x \in \mathbf{R}$ is $x \sin x$ is het imaginaire deel van xe^{ix}.

(8) Bereken de gebroken lineaire transformatie (=fractional linear transformation) F met $F(0) = 5,\ F(1) = 10,\ F(\infty) = 0$.

(9) $S := \{n^2 |\ n \in \mathbf{Z},\ n \geq 0\}$. Produceer een holomorfe funktie F op $\mathbf{C}$ zó dat S de verzameling van zijn nulpunten is en bovendien elk nulpunt orde 1 heeft. Hint: Weierstrass producten.

(10) Geef één van de twee formules die de Gammafunktie $\Gamma(z)$ definiëren.